Fundamentos de Programação Linear – PL

Prof. Luís César da Silva

Email: silvalc@cca.ufes.br **- Website:** www.agais.com

1. Introdução

Programação linear – PL é uma ferramenta da Pesquisa Operacional - PO aplicada a solução de problemas que objetivam a otimização de um sistema em estudo. A otimização refere: (i) a maximização de parâmentros, tais como: lucro, vendas, uso efetivo de uma área, nível de produção e uso de um determinado recurso; ou (ii) a minimização de parâmetros, tais como: custos de produção, uso de um determinado recurso de alto valor monetário e emprego de mão-de-obra.

Os modelos de PL são implementados por meio da elaboração de sistemas lineares constituídos de: (i) um conjunto de equações e inequações que descrevem as restrições do sistema real em estudo; e (2) uma equação para descrever a função objetivo que expressa o paramento a ser maximizado ou minimizado, conforme supra citado.

Para a definição e o perfeito entendimento dos componentes de um modelo de PL é apresentado abaixo a solução de um problema.

2. Estrutura dos modelos de PL

Exemplo:

A WPK (Wood Play Kids) fabrica dois tipos de brinquedos de madeira: soldados e trens. Os soldados são vendidos a R$ 27,00 e utilizam R$ 10,00 de matéria prima. Cada soldado fabricado e vendido tem custos administrativos de R$14,00.

Os trens são vendidos a R$ 21,00 e utilizam R$ 9,00 de matéria prima. E para cada trem fabricado e vendido implica em custos administrativos de R$10,00.

A fabricação dos brinquedos requer dois tipos de profissionais: carpinteiro e acabador. Cada soldado de brinquedo requer 1 hora de carpinteiro e 2 h de acabador, os de trem 1 hora de cada.

A cada semana a WPK tem disponível matéria prima para ocupar 100 horas de acabador e 80 horas de carpinteiro.

A demanda pelos trens é ilimitada, enquanto para os soldados no máximo 40 unidades por semana.

O desejo dos administradores da WPK é maximizar o lucro semanal (vendas – despesas). Deste modo, formule um modelo de PL para maximizar os lucros.

Para facilitar a implementação de modelos de PL é interessante criar uma tabela contendo as principais informações do sistema real em estudo. Isto facilita a implementação do modelo. Para o caso em estudo é apresenta da Tabela 1 que trás informações que caracterizam os processos de produção e comercialização da WPK.

Tabela 1 – Resumo da caracterização dos processos de produção e comercialização da WPK

Quesitos	Brinquedo: Soldado	Brinquedo: Trem
Valor de Venda	R$ 27,00/ud	R$ 21,00/ud
Custo de Matéria Prima	R$ 10,00/ud	R$ 9,00/ud
Custos Administrativos	R$ 14,00/ud	R$ 10,00/ud
Demanda de Horas de Carpinteiro	1 h/ud	1 h/ud
Demanda de Horas de Acabador	2 h/ud	1 h/ud
Limite de comercialização	Máximo 40 ud/semana	Sem restrição

O procedimento apresentado acima em modelagem é definido como formulação do problema. Esta tarefa é fácil de ser conduzida quando a empresa segue as boas práticas gerencias. Assim, é reduzido o tempo de confecção de tabelas semelhantes a Tabela 1, como também, trás maior confiabilidade na aplicação das ferramentas de pesquisa operacional, visto o maior grau de veracidade das informações a serem utilizadas.

a) Variáveis de decisão:

Conforme o enunciado do exemplo apresentado a solução deve indicar aos administradores da WPK o plano de produção no que ser refere ao número de unidades dos brinquedos soldados e trens devem ser fabricados por semana. Isto é indicativo que duas variáveis de decisão devam ser criadas:

USF = Unidades de soldados a fabricar; e

UTF = Unidades de trens a fabricar.

b) Função objetivo:

Em modelos de PL, o tomador de decisão sempre irá desejar maximizar, usualmente vendas e lucros, ou minimizar, geralmente custos e mão-de-obra. Para tanto, em função das variáveis de decisão, o analista de PL deverá estruturar uma equação de primeiro grau que descreva o parâmetro, o qual é desejado maximizar ou minimizar. Esta equação é denominada ***Função Objetivo*** e, geralmente, é identificada pela letra z. Para WPK o desejado é maximizar o lucro semanal que pode ser descrito como:

Vendas Semanais – custos semanais de aquisição de matéria prima – custos semanais administrativos.

As vendas e os custos semanais da WPK podem ser expressos e termos das variáveis de decisão USF e UTF.

Vendas Semanais = Venda Semanal de Soldados + Venda Semanal de Trens

Vendas Semanais = 27 USF + 21 UTF (Eq. 01)

Do mesmo modo:

Custos Semanais de Aquisição de Matéria Prima = 10 USF + 9 UTF (Eq. 02)
Custos Semanais Administrativos = 14 USF + 10 UTF (Eq. 03)

Sendo assim, a função objetivo z pode ser descrita pela composição das equações 01, 02, e 03:

Maximizar z = 27 USF + 21 UTF – (10 USF + 9 UTF) - (14 USF + 10 UTF) (Eq. 04)

Simplificado a equação 04:

Maximizar z = 3 USF + 2 UTF (Eq. 06)

c) Restrições:

Se as variáveis USF e UTF tiverem os seus valores aumentados indefinidamente, a função objetivo da WPK terá o seu valor aumentado infinitamente. No entanto, o aumento dos valores das variáveis de decisão é limitado pelas restrições de recursos ou por imposições do mercado. Para o problema apresentado existem três restrições:

Restrição 1: a disponibilidade máxima de 100 horas/semanais de acabador;
Restrição 2: a disponibilidade máxima de 80 horas/semanais de carpinteiro; e
Restrição 3: a limitação de compra do mercado em no máximo 40 unidades/semanais do brinquedo soldados.

Deste modo, as inequações que caracterizam as restrições são:

Primeira) 2USF + 1UTF $\leq$ 100 ! Horas Semanais de Acabador

Segunda) 1USF + 1UTF $\leq$ 80 ! Horas Semanais de Carpinteiro

Terceira) 1USF $\leq$ 40 ! Número Máximo de Unidades de Soldados

Os coeficientes das equações e inequações que descrevem as restrições são normalmente denominados coeficientes tecnológicos. Isto porque eles refletem a complexidade tecnologia para produção de um determinado bem. O número colocado do lado direito das equações e ou inequação (***right-hand side ou rhs***) geralmente correspondem à disponibilidade de recursos. O que é o caso das restrições 1 e 2.

- Restrições de Sinais:

Na complementação do modelo de PL é necessário definir se as variáveis de decisão podem assumir valores positivos, negativos ou zero. Se as variáveis podem assumir qualquer valor são denominadas sem restrição de sinal (***unrestricted in sign - urs***). No caso da WPK é evidente que os possíveis valores de USF e UTF devem ser maior ou igual a zero, ou seja, não negativos. Os caso de valores negativos para variáveis de decisão são aceitos, por exemplo, em modelos econômicos que envolvem fluxo de caixa.

e) Definição do Modelo:

O modelo estruturado com o objetivo maximizar o lucro semanal da WPK apresenta a seguinte configuração:

Max 3USF + 2UTF ! *Função Objetivo*

Sujeito a:

2USF + UTF $\leq$ 100 ! *Restrição Horas Acabador*

USF + UTF $\leq$ 80 ! *Restrição Horas Carpinteiro*

USF $\leq$ 40 ! *Restrição de Vendas*

USF $\geq$ 0 ! *Restrição de Sinal*

UTF $\geq$ 0 ! *Restrição de Sinal*

3. Solução Gráfica do Modelo

Qualquer problema de PL com duas variáveis pode ser resolvido graficamente. Neste caso, cada uma das variáveis de decisão, exemplo x_1 e x_2, correspondem a um dos eixos no plano cartesiano. Assim por exemplo, ao ser definida a inequação:

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6 \qquad \text{(Eq. 07)}$$

Se x_2 for expresso em função de x_1 ter-se-á:

$$x_2 = 2 - \frac{2}{3} x_1 \qquad \text{(Eq.08)}$$

Na Figura 1 é representada a Equação 8, sendo demonstrado: (i) a região de aceitação da inequação Eq. 07 que corresponde aos pontos localizados sobre e acima da reta; e (iii) a rejeição da inequação que refere aos pontos abaixo da reta. Como a inequação envolve igualdade faz com que os pontos sobre a reta sejam inclusos na Região de Aceitação.

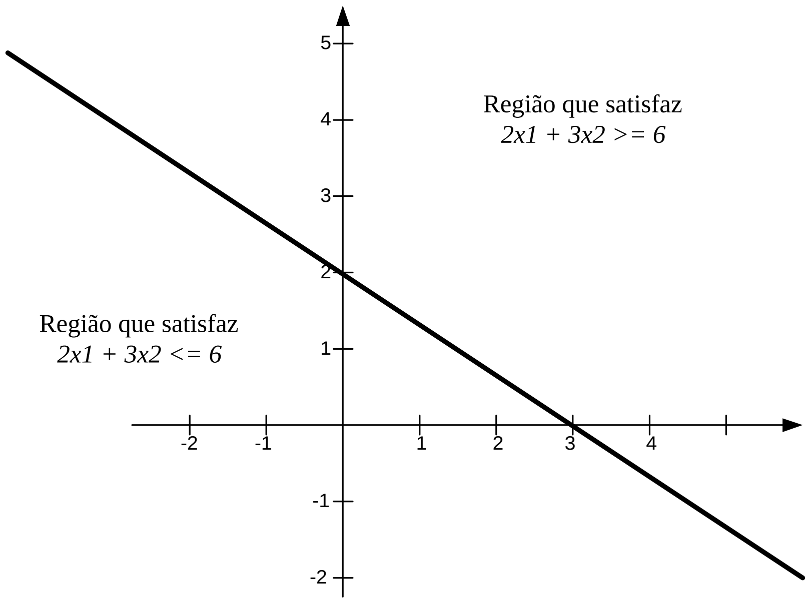

Figura 7 – Representação gráfica de uma inequação.

Para ilustrar a solução gráfica de modelos de Programação Linear é considerado o modelo da WPK, sendo as restrições enumeradas conforme destacado abaixo:

Restrições:

2USF + UTF	$\leq$	100	(2. Restrição Horas Acabador)
USF + UTF	$\leq$	80	(3. Restrição Horas Carpinteiro)
USF	$\leq$	40	(4. Restrição de Vendas)
USF	$\geq$	0	(5. Restrição de Sinal)
UTF	$\geq$	0	(6. Restrição de Sinal)

Na Figura 8 são representados os seguimentos de retas para cada uma das restrições. Os pontos (USF_i, UTF_i) pertencentes à região de soluções viáveis atendem a todas as restrições. Observando as restrições de número 5 e 6 pode ser afirmado que as soluções pertencem ao primeiro quadrante. Isto é indicado pelas pequenas setas apontando para a direita do eixo UTF e acima do eixo USF.

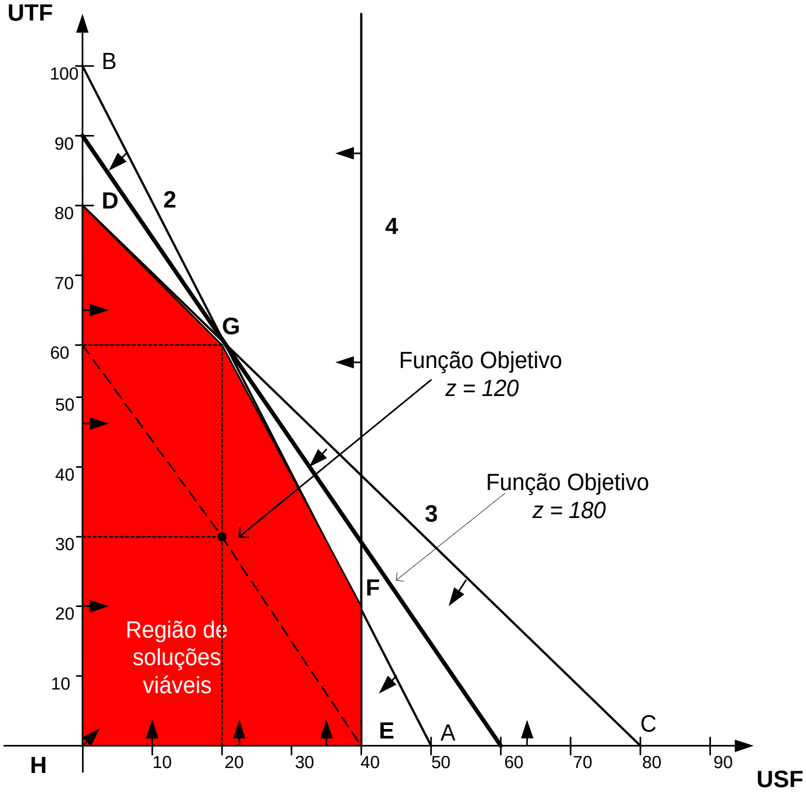

Figura 8 – Representação gráfica para o problema da WKP.

De modo semelhante, para a restrição 2, é tido que todos os pontos abaixo do segmento AB atendem a inequação. O mesmo ocorre para a restrição 3, para o segmento de reta CD. Para a restrição 4 os pontos devem estar à esquerda da reta 4. Desde modo, é estabelecida a região em que todas as restrições são atendidas, o que na Figura 8 é representado pelo polígono DGFEH.

Determinada a região de soluções viáveis deve ser procurado o ponto que define o máximo valor para função objetivo: z = 3USF + 2UTF. Para tanto é necessário determinar uma linha em que todos os valores de z seja iguais. Nos problemas de maximização esta linha é chamada de iso-lucro (*isoprofit line*), nos de minimização iso-custo (*isocost line*). Para traçar a linha de iso-lucro deve ser escolhido qualquer ponto na região de soluções viáveis, por exemplo (20, 30). Para este caso z será igual a R$120,00. Ou seja, todos os pontos sobre esta linha proporcionam o lucro de R$120,00.

A partir da linha iso-lucro z = 120 devem ser traçadas linhas paralelas até que seja encontrada a que proporciona maior valor de z. Para o exemplo apresentado o maior valor de z é 180, isto para o ponto (20, 60). Deste modo a WPK deve fabricar semanalmente 20 soldados e 60 trens, situação que proporcionara um lucro semanal de R$ 180,00.

4. Solução Modelo Por Meio de Softwares

Existem no mercado vários pacotes dedicados a solução de modelos de PL. Dentre esses um dos mais difundidos é o LINDO™ (**L**inear **In**teractive and **D**iscrete **O**ptmizer) comercializado pela Lindo System, Inc. (http://www.lindo.com). O software pode ser aplicado a problemas com até 50 mil restrições e 200 mil variáveis. Vide a Tabela 2 o formato do modelo no ambiente LINDO e a direta a solução.

Tabela 2 – Forma de apresentação do modelo da WPK no ambiente do software LINDO

Modelo no Ambiente do LINDO	**Resultado**
! Modelo Aplicado a WPK – Wood Play Kids ! ! Variáveis ! USF = unidade de soldados fabricados ! USF = unidade de trens fabricados Max 3USF + 2UTF st Acab) 2USF + UTF <= 100 Carp) USF + UTF <= 80 Sold) USF <= 40 End	OBJECTIVE FUNCTION VALUE 1) 180.0000 VARIABLE VALUE REDUCED COST USF 20.000000 0.000000 UTF 60.000000 0.000000 ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES ACAB) 0.000000 1.000000 CARP) 0.000000 1.000000 SOLD) 20.000000 0.000000

Conforme os resultados apresentados na Tabela 2, o máximo valor possível para função objetivo é R$ 180,00, o que corresponde ao lucro semanal da empresa. Para tanto, devem ser fabricadas 20 unidades do brinquedo soldado e 60 do brinquedo trem.

Em resultados é também apresentado um relatório para cada uma das linhas (ROW) que referem as restrições. Assim, por exemplo, para as restrições horas acabador e horas carpinteiro não ocorrem nem sobras ou falta, uma vez que a coluna SLACK OR SURPLUS (Déficit ou Superávit) apresentaram valor igual a zero. No entanto a restrição de vendas associada a brinquedo soldado apresentou um déficit igual a 20. Isto significa que para a solução ótima, o número de unidades do brinquedo soldado a fabricar ficou 20 unidades abaixo do limite estipulado em 40.

5. Ponderações Finais

Os modelos de Programação Linear – PL constituem em um ferramental estratégico e indispensável para o planejamento e gerenciamento de sistemas nas diversas áreas de conhecimento. As variáveis envolvidas devem ser determinística, ou seja, não apresentam alternância de valores associados a um nível de probabilidade, o que caracteriza as variáveis aleatórias.

Mesmo apresentado essa restrição, os modelos de PL tem sido eficientemente aplicados na solução de problemas associados a situações, tais como: (i) elaboração de planos de dietas para humanos e animais; (ii) definição de escalas de trabalho; (iii) formulação de misturas aplicadas a diversos campos de conhecimento, exemplos: formulações de adubos, concreto, combustíveis, lubrificantes e cosméticos; (iv) definição de planos de produção em fabricas; (v) seleção de rotas de transporte; e (vi) estruturação de planos de investimento e desenvolvimento.

6. Referências

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisão: modelagem em Excel**. Editora Campus. 2002.

LAW, A. M. e KELTON, W. D**. Simulation modeling and analysis**. McGraw-Hill Inc., 2a ed. 1991.

PRADO, D. **Programação linear**. Editora de Desenvolvimento Gerencial. 2000.

WINSTON, W. L. **Operations research - applications and algorithms**. International Thomson Publishing. Belmont, California. 1994. 1312p.